Etude didactique de la reprise de l’algèbre par l’introduction de l’algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français

Pour citer cet article :

Briant, Nathalie (2015). Étude didactique de la reprise de l’algèbre par l’introduction de l’algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français. *Adjectif.net* [En ligne]. Mis en ligne le mardi 05 mai 2015. URL : http://www.adjectif.net/spip/spip.php?article345

Résumé :

Cet article présente une synthèse de la thèse de N. Briant dirigée par Alain Bronner (Laboratoire LIRDEF [1], FDE) et soutenue le 10 décembre 2013 à l’Université de Montpellier.

Mots clés :

Algorithme, Didactique, Enseignement secondaire, Informatique, Transposition

Introduction

La réforme des lycées en France de 2009 s’est accompagnée d’un changement de programmes en mathématiques. Relativement à la classe de seconde, deux axes m’ont questionnée : d’une part, la nouvelle place de l’algèbre, désormais plongée dans le domaine fonctionnel, et d’autre part l’introduction d’une familiarisation avec l’algorithmique. De plus, ce niveau de classe représente pour chaque élève suivant une filière générale un passage, une classe charnière entre le collège et la série du cycle terminal du lycée qui sera choisie. L’algèbre et l’algorithmique y trouvent une place spécifique, puisqu’elles fonctionnent comme un verrou d’accès aux études mathématiques et scientifiques. De par l’intérêt de lier ces deux sujets, une étude didactique de la reprise de l’algèbre élémentaire en classe de seconde est proposée, et plus particulièrement des objets gravitant autour du concept d’équation, objets dont le sens est affiné par le détour de l’algorithmique.

Me situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1999), j’étudie les conditions et les contraintes de cette reprise, au travers d’une ingénierie didactique mise en place avec la collaboration de trois enseignants.

Dans cette synthèse, je tire quelques conséquences de ce travail sur les conceptions des équations par les élèves et sur l’intégration de l’algorithmique dans les programmes de mathématiques.

Les changements dans les programmes officiels de mathématiques suite à la réforme des lycées de 2009

Ces changements de programmes concernent, entre autres pour la classe de seconde, le domaine du *numérique - algébrique*. La lecture du bulletin officiel de mathématiques de la classe de seconde (MEN, 2009) montre un découpage des savoirs en trois domaines nommés « *Fonctions ; Géométrie ; Statistiques et* *probabilités* ». L'algèbre n'y apparaît pas comme un domaine à proprement parler. L'apprentissage de concepts algébriques est bien présent mais ceux-ci sont scindés en différents secteurs [2] qui apparaissent disséminés parmi les secteurs fonctionnels : par exemple, le secteur des *équations* est situé entre *l'étude qualitative des fonctions* et l'étude des *fonctions de référence*. De même, le secteur des *inéquations* se trouve entre l'étude *des fonctions polynomiales et homographiques* et la *trigonométrie*. Cette brève étude des programmes montre la volonté de la noosphère de considérer l'algèbre dans le *champ conceptuel* (Vergnaud 1990) des fonctions. L'algèbre ne se présente plus comme une branche des mathématiques étudiée pour elle-même, mais comme un *outil* (Douady, 1986) au service des autres branches des mathématiques et plus particulièrement de l'analyse.

Je me suis alors questionnée sur l'interprétation que fait le professeur de la classe de seconde sur la logique des concepteurs des programmes, où l'algèbre est considérée essentiellement comme un outil. Confronté aux difficultés de ses élèves, n'est-il pas dans l'obligation de s'attarder sur l'algèbre en tant qu'*objet* (Douady, 1986) et de mettre en place ou de reprendre des praxéologies algébriques (Chevallard, 1999), en les décontextualisant des problèmes empruntés à d'autres champs mathématiques ? Quel degré de variabilité des élèves est observable sur leur capacité à révéler l'algèbre en tant qu'objet par rapport à l'utilisation qu'ils en font en tant qu'outil ?

Un autre changement institutionnel concerne l'introduction, dans les classes de la voie générale du lycée, de l'*algorithmique* dans les programmes de mathématiques. Les auteurs des programmes la présente comme *une formation des élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes,* et soulignent l'initiation des élèves à l'algorithmique et à la programmation, en utilisant ces domaines au service des mathématiques. Les recommandations suivantes sont données (MEN, 2009) : « *il ne s'agit pas de former des programmeurs mais de faire en sorte que les mathématiques et l'algorithmique soient au service d'activités de résolution de problèmes pour les sciences* », c'est-à-dire que l'« informatique » ne doit pas être introduite en tant que discipline avec l'enseignement de ses concepts, mais il s'agit de considérer comment la discipline « mathématiques » peut en utiliser ses concepts.

Cadre théorique, problématique et méthodologie

Cadre théorique

Afin de modéliser le travail de l'enseignant et celui de ses élèves, en tenant compte des conditions et contraintes qui s'exercent sur eux, j'ai choisi un cadre théorique permettant des analyses autant de niveau macro-didactique que micro-didactique telle la *théorie anthropologique du didactique* de Chevallard (1985, 1992, 1999). Ce cadre est complété par les travaux de Brousseau (1998) sur la *théorie des situations*, pour la création des situations de *l'ingénierie didactique* (Artigue, 1990) mises en place dans l'expérimentation, et que je définis en section suivante. Également les concepts de *champ conceptuel* (Vergnaud, 1990), de la *dialectique outil-objet* (Douady, 1986), et celui de *reprise* (Larguier, 2009) sont convoqués. Des cadres plus spécifiques relatifs aux domaines de l'algèbre et de l'algorithmique ont également été utilisés. Ainsi pour l'algèbre, mes principales références sont les travaux de Grugeon (1995). Pour l'intégration didactique des TICE, je me suis inscrite dans les travaux de Rabardel (1995) sur la *genèse instrumentale*, ceux de Balacheff (1994) sur la *transposition informatique* et ceux d'Artigue (1997) sur la *pseudo-transparence*. Notons que pour l'algorithmique à proprement parler, je me suis basée sur les thèses de Nguyen (2005) et de Modeste (2012), et que peu de travaux de recherche en didactique existent à ce jour dans ce domaine.

Problématique et hypothèses de recherche

La problématique de mes travaux peut se résumer par cette question : « *Quelles sont les conditions et les contraintes, côté enseignant et côté apprenant, pour une reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique dans le cadre de la classe de seconde du lycée ?* »

À partir de cette problématique, quatre hypothèses de recherche ont été déclinées, qui concernent le rapport des enseignants au programme institutionnel, sur la nécessité de considérer l'algèbre, non seulement comme un outil pour résoudre des problèmes mais aussi comme un objet à étudier (hypothèse H1) ; le rapport des élèves à la considération des concepts algébriques dans leur dimension objet (hypothèse H2) ; l'apport de l'algorithmique liée à la programmation pour l'enseignement et l'apprentissage de concepts algébriques (hypothèse H3) ; l'impact des choix d'organisations mathématiques et didactiques, dans l'expérimentation, sur les possibilités d'apprentissages des élèves (hypothèse H4).

La problématique propose donc d'étudier diverses conditions et contraintes relativement aux élèves, aux enseignants et à l'institution Éducation Nationale, afin d'aborder comment vivent conjointement les domaines de l'algèbre et de l'algorithmique. Dans cette synthèse, seule l'hypothèse H3 sera évoquée.

L'algorithmisation des équations polynomiales de degré 1 et 2

Vu l'étendue du domaine algébrique, il me fallait circonscrire un secteur de l'algèbre, un secteur qui permette de travailler sur les *objets* eux-mêmes, et également un secteur qui puisse être lié à l'algorithmique, puisque ma volonté était d'intégrer ce domaine à ma problématique et d'en montrer l'intérêt. Je me suis inspirée d'Al Khawarizmi et de son traité « *Al-Kitab al mukhtasar hisab al-jabr wa'l-muqabala* » qui répertorie de façon systématique, algorithmique pourrait-on dire, des méthodes de résolution d'équations du 1er et du 2nd degré.

L'introduction de l'algorithmique pourrait être synthétisée à l'aide d'un organigramme comme celui de la figure 1. Cet organigramme succinct de résolution des équations polynomiales de degré 1 ou 2 est accessible à des élèves de seconde qui ne connaissent pas encore la technique dite « du discriminant » pour résoudre les équations de degré 2, puisque celle-ci fait partie du programme de la classe de première.

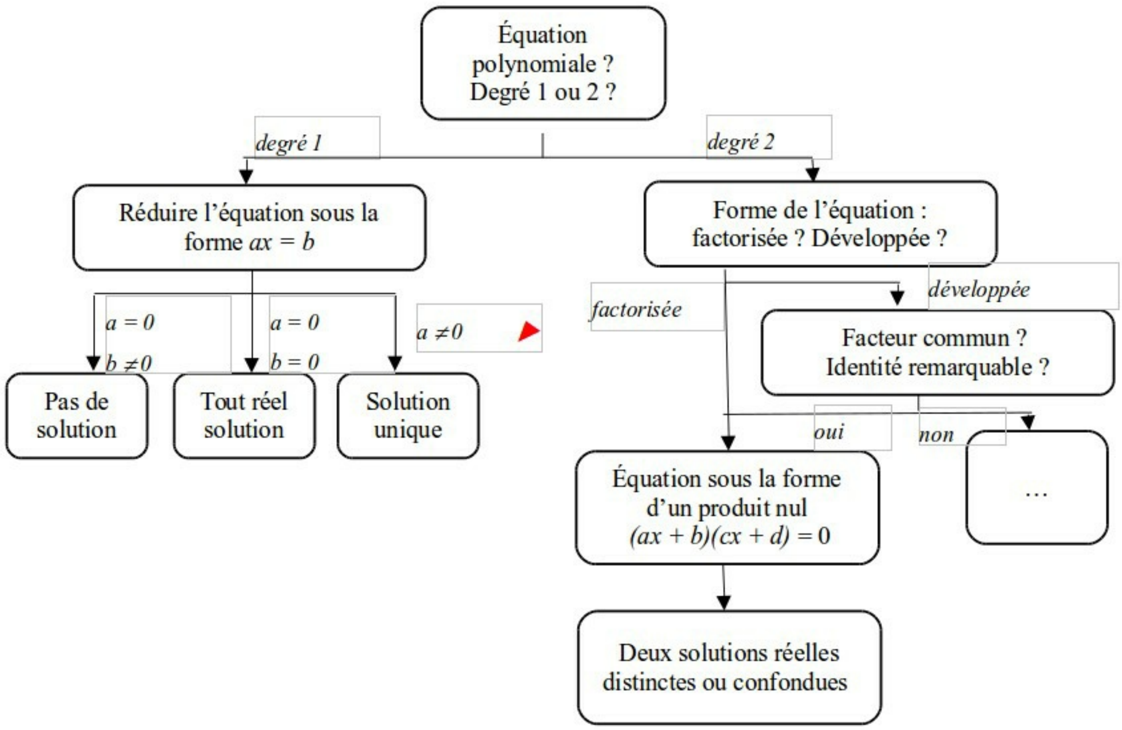


Figure 1 – Algorithmes de résolution d'équations polynomiales de degré 1 ou 2

L'algorithmique se trouve ici être *outil* au service de l'algèbre, cette dernière étant l'*objet* sur lequel l'algorithmique opère. En effet, résoudre une équation du 1er ou du 2nd degré demande de reconnaître une certaine catégorie d'équations, puis d'effectuer un traitement algébrique selon des techniques éprouvées permettant sa résolution. Ces équations ont déjà été étudiées dans les classes de 4e et 3e du collège et elles sont ici reprises en y ajoutant l'algorithmique. Cette *reprise* permet une avancée du temps didactique en ajoutant aux connaissances anciennes de nouvelles connaissances : si les types d'équations retravaillés sont ceux enseignés au collège, sont *noués ensemble de l'ancien et du nouveau* (Larguier, 2009) par l'ajout de l'étude d'algorithmes et de programmes.

Ainsi, les situations proposées dans l'ingénierie didactique menée offrent les types de tâches suivants :

- la *catégorisation* d'équations de degré 1 et 2 ;
- la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation paramétrée qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée ;
- la détermination des techniques de résolution de types d'équations reconnues, par le biais de l'algorithmique et de la programmation.

Cet enchaînement de tâches constitue la base de l' *algorithmisation* des techniques de résolution, et permet de déterminer des *algorithmes* de résolution des équations, à la manière d'Al Khawarizmi. L'objectif principal de l'expérimentation est que les élèves, avec ou sans ordinateur, c'est-à-dire aussi bien en environnement informatisé qu'en environnement papier-crayon, parviennent à catégoriser type d'équation et technique de résolution correspondante, et qu'ils comprennent que la résolution des équations de degré 1 et 2 peut se faire « automatiquement », autrement dit de manière *algorithmisée*.

La définition suivante d'un algorithme, donnée par Modeste (2012), est conforme à cet objectif :

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (p.25)

En effet, il s'agit d'amener les élèves à comprendre que la reconnaissance de la nature et de la forme d'une équation d'une certaine *famille* leur permet de choisir, dans leur catalogue de techniques, celle la plus adéquate pour résoudre l'équation donnée.

Méthodologie de recherche

Afin de répondre à ma problématique et d'éprouver mes hypothèses de recherche, j'ai élaboré plusieurs études, mais je ne mentionnerai dans cette synthèse que celle relative à l'ingénierie didactique mise en œuvre en classe de seconde, comportant un ensemble de *situations* mentionnées en section précédente et expérimentées dans trois classes différentes. Cette expérimentation est construite de façon collaborative avec trois enseignants de lycée. La collaboration est à prendre dans le sens des principes de la *recherche collaborative* développés par Bednarz et Desgagné (1997, 2005). Le dispositif expérimental mis en place comporte les phases suivantes :

- une *trame d'ingénierie*, élaborée par le chercheur seul, composée de *situations* d'apprentissage (Brousseau, 1998), permettant de lier le secteur algébrique des équations et l'algorithmique. Cette trame se situe dans le *monde du chercheur*, selon une expression de Bednarz (2005), c'est-à-dire correspond à ses préoccupations de recherche. Dans cette trame, des éléments imposés et des éléments modulables des situations sont présents. Par exemple, le fait de travailler les équations avec l'algorithmique et la programmation est imposé mais les organisations mathématiques et didactiques ne sont pas complètement définies : les enseignants peuvent en choisir des éléments comme les exemples d'équations à résoudre, les consignes, les modalités de travail des élèves, le fait de faire ou non une institutionnalisation, etc. ;
- les *trames projetées*, qui consistent en l'adaptation particulière par chaque professeur de la trame d'ingénierie, selon ses propres conditions et contraintes. Ces trames projetées sont réalisées en collaboration entre le chercheur et chaque enseignant ;
- à la suite de la *trame projetée*, chaque enseignant expérimentateur ajuste seul sa propre séquence, composée de plusieurs séances. Ces séquences sont alors conduites dans les classes de seconde par les professeurs eux-mêmes. Les séquences sont ensuite analysées a posteriori par le chercheur seul.

Quelques résultats de la recherche

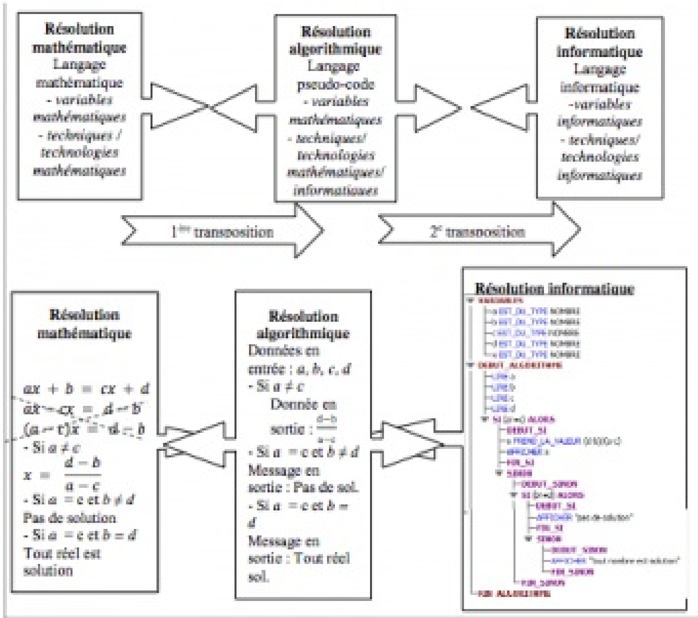
Dans cette dernière partie, quelques résultats relatifs à l'expérimentation menée sont présentés, en particulier sur la constitution des algorithmes de résolution des équations du 1er degré. Je dégage également de mes recherches une schématisation de la *transposition* qui s'opère lors de la recherche d'algorithmes pour résoudre un type de problème mathématique.

L’algorithmique et la programmation pour la résolution d’équations

La conception des programmes informatiques qui résolvent une certaine catégorie d’équations requiert plusieurs types de tâches (Chevallard, 1999), composés de la reconnaissance d’une forme générique paramétrée pour la série d’équations donnée, de la résolution sous forme littérale de l’équation paramétrée précédente, de la conception d’un algorithme permettant d’automatiser la résolution des équations ayant la forme générique reconnue, de l’écriture, sous un logiciel de programmation donné, d’un programme traduisant l’algorithme précédent puis de l’utilisation du programme réalisé pour résoudre les équations données.

Afin d’établir les liens que ces tâches entretiennent entre elles, j’évoquerai la *double transposition* de la résolution d’un problème mathématique en vue de sa programmation. Celle-ci est schématisée en figure 2, en l’exemplifiant pour l’obtention d’un programme de résolution de l’équation du premier degré du type $ax + b = cx + d$ (a, b, c, d réels donnés).

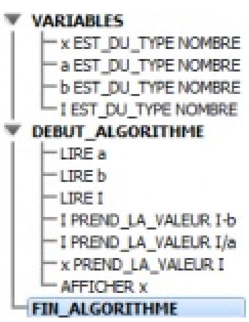
Figure 2 - Double transposition de la résolution d’un problème mathématique en vue de sa programmation



Cette double transposition a les caractéristiques suivantes :

- la *première transposition* nécessaire à la conception d’un algorithme à partir de la résolution mathématique de l’équation implique la disparition d’étapes intermédiaires de la résolution en environnement papier-crayon (indiquées en pointillés sur la figure 2). Il existe ici une *pseudo-transparence* (Artigue, 1997) des environnements papier-crayon et algorithmique et une *non-congruence* de ces deux environnements (Duval, 1995). Il y a toute une *reconstruction* nécessaire à envisager pour concevoir l’algorithme à partir de la résolution de l’équation, une autre pensée dans laquelle il faut entrer, une *pensée algorithmique* ;
- la *seconde transposition* pour la conception du programme informatique à partir d’un algorithme nécessite non seulement la compréhension d’un nouveau langage, mais également une adaptation de l’algorithme aux contraintes du logiciel utilisé. Ceci induit ici encore une non-congruence entre l’algorithme conçu et le programme informatique.

Suit une brève analyse comparée des productions de deux élèves de seconde, Thomas et Alliaume (Cf. figure 3). Les programmes sont conçus ici pour résoudre les équations du type $ax + b = c$.



Production de l’élève Thomas	Production de l’élève Alliaume

Figure 3 - Exemples de programmes de résolution de l’équation ax + b = c (Élèves de seconde)

Thomas essaie d’être en adéquation dans son programme avec son raisonnement en environnement papier-crayon. Bien qu’il n’y ait pas *congruence* au sens de Duval (1995) entre les deux registres, l’élève tente ici de minimiser la distance entre les deux environnements, en introduisant la variable I. Cette méthode qui fonctionne ici, se révèlerait périlleuse pour un autre type d’équation. En revanche la production d’Alliaume montre un élève détaché de sa résolution en environnement papier-crayon et qui produit un programme optimisé en nombre de variables et d’instructions.

Conclusion

Ce travail m’a permis de mettre au point une méthodologie de recherche collaborative, avec une coopération entre chercheur et enseignants, méthodologie que j’ai développée et expérimentée de façon empirique. Pour poursuivre ce travail, il serait possible de faire de ce dispositif de collaboration un objet d’étude et d’en déterminer les conditions et les contraintes.

Un second apport est une étude transpositive, en vue de l’intégration de l’algorithmique/programmation dans l’enseignement des mathématiques, ce qui n’avait pas encore vraiment fait l’objet d’une recherche spécifique, vue la récente introduction de ces domaines dans les programmes du lycée. Cette étude, même si l’ingénierie proposée a été réduite à trois enseignants, a été assujettie aux contraintes et conditions institutionnelles. Les acteurs se sont heurtés aux problèmes de congruence avec l’enseignement usuel et les problèmes soulevés semblent aller au-delà de ces études singulières pour penser des utilisations de l’algorithmique, et aussi pour penser la formation nécessaire, initiale et continue, des enseignants. En effet, les analyses des séquences des enseignants expérimentateurs ont montré des difficultés à intégrer l’algorithmique et la programmation : ces professeurs sont autodidactes en ces domaines. Si l’institution Éducation Nationale souhaite que leur intégration soit viable au sein de la discipline des mathématiques, un *équipement praxéologique* de la profession (Chevallard & Cirade, 2010) serait nécessaire, équipement comportant à la fois des savoirs de référence sur l’algorithmique, la programmation et la logique mais aussi des savoirs pour enseigner ces nouveaux domaines.

Une des hypothèses accompagnant la problématique pose la question de l’apport de l’algorithmique liée à la programmation pour une *reprise* de l’algèbre en seconde. L’expérimentation menée a montré que l’introduction de l’algorithmique favorise cette *reprise* (Larguier, 2009) pour le secteur des équations. Cette reprise ne se fait pas à l’identique, ce n’est pas qu’un simple redoublement du temps didactique : elle permet d’aller plus loin dans la considération des objets qui gravitent autour du concept d’équation. En particulier, le détour par l’algorithmique a permis de considérer les différents types de lettres qui composent une équation, paramètre et inconnue : une clarification du concept de paramètre a été opérée, alors que celui-ci est une notion *paramathématique* (Chevallard & Joshua, 1982). La structure de l’équation aide à comprendre la structure de l’algorithme, et réciproquement. De plus, le fait de programmer les algorithmes et de ne pas en rester au stade de l’algorithme « papier-crayon », ajoute encore à cette différentiation essentielle du rôle des lettres : les paramètres sont des données d’entrée à faire lire à l’ordinateur, alors que l’inconnue est une donnée de sortie du programme à faire afficher à l’écran. La programmation permet l’exploration des objets de l’algèbre, en en réalisant une certaine *matérialisation*, en les « visualisant » et en « les faisant vivre » au sein d’un programme informatique. Un nouveau *registre* (Duval, 1995), offrant une nouvelle représentation des objets de l’algèbre, est ainsi créé.

Néanmoins, l’accession à ce registre nécessite une instrumentation relativement poussée. Beaucoup d’élèves ont été arrêtés, au départ, par leur méconnaissance de la structure de base d’un algorithme et d’un programme, ainsi que celle du langage de programmation du logiciel. On ne peut pas faire l’économie de la nécessaire *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) pour obtenir des résultats probants dans le domaine de l’algèbre. Mais ceci aurait été vrai pour tout autre domaine mathématique que l’on aurait associé à l’algorithmique.

Références

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9* (3), 281-308.

Artigue, M. (1997). Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l’utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathetatics, 33(2),* 133-169

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14(1),* 9-42.

Bednarz, N. & Desgagné, S. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche 'avec' plutôt que 'sur' les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*. *31*(2), 245-258.

Briant, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00920506v1

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet et L. Trouche (dirs.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR et Paris : INRP.

Chevallard, Y. & Joshua, MA. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance*. Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*.2, p. 157-239.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*. *23*(2), 371-393.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : Peter Lang.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G*. (Thèse de doctorat, université Paris 7).

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* (Thèse de doctorat, Université Montpellier 2).

MEN (2009). Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble).

Nguyen, C-T. (2005). *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice.* (Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble).

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2-

3), 133-170.

[1] Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation et Formation. Université de Montpellier

[2] Les termes *domaine* et *secteur d’étude* sont à prendre au sens des niveaux de l’échelle de codétermination didactique de Chevallard (1999).